

Investigando o desenvolvimento do sentido do número

Joana Brocardo, Fátima Mendes e Catarina Delgado,
Escola Superior de Educação de Setúbal

A necessidade de repensar o papel do cálculo no currículo de Matemática é um dos aspectos que tem vindo a ser discutido a nível nacional e internacional. Contrapondo a uma aprendizagem dos números e das operações centrada no domínio de algoritmos defende-se hoje que “todos os alunos devem adquirir uma compreensão global do número e das operações a par da capacidade de usar essa compreensão de maneira flexível para fazer julgamentos matemáticos e desenvolver estratégias úteis de manipulação dos números e operações” (Abrantes, Serrazina e Oliveira, 1999, p. 46).

A expressão *sentido do número* começou a ser usada por vários autores para referir de modo sintético o conjunto de competências numéricas que hoje se considera muito importante desenvolver nos alunos. Embora o significado atribuído a esta expressão não seja totalmente coincidente, consideramos que a definição proposta por McIntosh *et al.* (1992) reúne de uma forma clara todos os aspectos essenciais. Estes autores, recorrendo a um modelo composto por três blocos, caracterizam *o sentido do número* considerando que ele envolve:

- (1) conhecimento e destreza com os números – englobando o sentido da regularidade dos números, as múltiplas representações dos números, o sentido da grandeza relativa e absoluta dos números e, finalmente, o uso de sistemas de referência que permitem avaliar uma resposta ou arredondar um número para facilitar o cálculo.
- (2) conhecimento e destreza com as operações – englobando a compreensão do efeito das operações, das propriedades e a das relações entre as operações.
- (3) aplicação do conhecimento e da destreza com os números e as operações em situações de cálculo – englobando a compreensão para relacionar o contexto e os cálculos, a consciencialização da existência de múltiplas estratégias, a apetência para usar representações eficazes e a sensibilidade para rever os dados e o resultado.

Adoptando este entendimento de *sentido do número* e considerando que ele deve ser uma das componentes mais importantes do currículo de Matemática nos primeiros anos, a equipa do projecto *Desenvolvendo o sentido do número: perspectivas e exigências curriculares* (DSN-PEC) tem procurado aprofundar o estudo sobre o desenvolvimento do sentido do número nos primeiros anos de escolaridade (5-12 anos), bem como aspectos relacionados com o desenvolvimento curricular em matemática e a prática lectiva. Neste projecto, de acordo com níveis de ensino, foram formadas três equipas – Pré escolar, 1º Ciclo e 2º Ciclo - que se subdividem em vários grupos de trabalho consoante os anos de escolaridade, constituídos por dois professores do ensino superior e por dois ou três professores do terreno. Cada um destes grupos concebe, implementa e reformula tarefas sobre números e cálculo. Para cada uma delas, além da proposta propriamente dita para os alunos, foi construída uma ficha com indicações para o professor que incluem vários itens: (i) ano de escolaridade; (ii) ideias e procedimentos disponíveis e em desenvolvimento; (iii) ideias e procedimentos a desenvolver; (iv) sugestões para apresentação e exploração da tarefa; (v) possíveis caminhos a seguir pelos alunos.

No processo de elaboração das tarefas podem identificar-se três fases distintas. Uma primeira fase, corresponde à sua construção em simultâneo com a ficha com as indicações para o professor, incluindo apenas os primeiros quatro tópicos acima referidos. Participam nesta fase todos os elementos do grupo que integram o projecto. A segunda fase, refere-se à implementação da tarefa na sala de aula pelos professores do terreno. A terceira e última fase corresponde à reformulação da tarefa e à conclusão da ficha de indicações para o professor com a descrição dos possíveis caminhos a seguir pelos alunos. Este trabalho resulta da reflexão dos vários elementos do grupo sobre os resultados da implementação da tarefa na prática e ainda da reflexão conjunta de todos os elementos da equipa.

Como parte integrante deste processo desenvolve-se igualmente uma vertente investigativa.

Nesta comunicação iremos apresentar o modelo teórico que enquadra este projecto que integra as duas vertentes referidas anteriormente – desenvolvimento e investigação – e reflectir sobre a concepção e aplicação de uma das tarefas desenvolvidas pela equipa do 1º Ciclo.

Enquadramento do projecto: integrando o desenvolvimento e a investigação

O ciclo de ensino que representamos esquematicamente na figura 1 constitui a concretização do modelo de Simon (1995) em que se baseou o desenvolvimento do projecto DSN. Simon parte da tensão que sentem os professores quando procuram conciliar os seus próprios objectivos e direcções de trabalho com o modo de pensar dos alunos e com o modo como aprendem. Segundo este autor, planificar o ensino é tomar decisões sobre os conteúdos e sobre as tarefas de aprendizagem. É neste contexto que introduz o conceito de trajetória hipotética de aprendizagem – *hypothetical learning trajectory* – um caminho de aprendizagem marcado por um certo número de tarefas que o professor concebe ao pensar nas ideias e processos matemáticos que quer que os alunos desenvolvam.

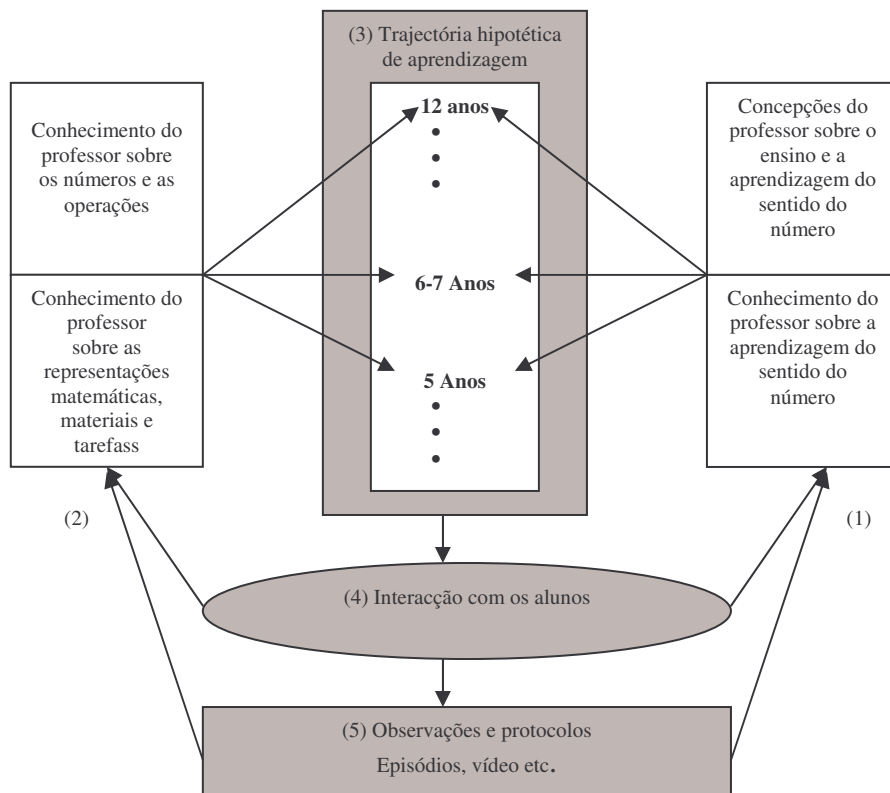


Figura 1: Ciclo de ensino (adaptado de Simon, 1995)

Esta trajetória de aprendizagem é hipotética porque é concebida como uma experiência de ensino e porque não é possível prever se ela será, de facto, uma via real de aprendizagem. Ela é, isso sim, previsível na medida em que o professor pode antecipar as abordagens, discussões e resoluções que pode proporcionar aos alunos.

Segundo Simon (1995), para organizar estas trajectórias de aprendizagem, os professores usam vários domínios específicos de conhecimentos. No contexto do nosso projecto são fundamentais:

- as concepções dos professores a propósito da aprendizagem do sentido do número e o seu conhecimento sobre esta aprendizagem ao nível da prática (elemento 1 do modelo);
- os conhecimentos matemáticos dos professores (no nosso caso, sobre os números e operações) e o conhecimento do professor sobre representações matemáticas, materiais e tarefas a propor aos alunos (elemento 2 do modelo).

È durante as interacções com os alunos (elemento 4 do modelo) que o professor pode avaliar em que medida os alunos reagem de acordo com o previsto e evoluem na direcção pretendida. Ao analisar os processos e resultados destas interacções e ao reconstruir o processo de aprendizagem (elemento 5 do modelo), o professor pode identificar novas concepções e procedimentos dos alunos o que precisa a sua compreensão sobre o ensino e aprendizagem do sentido do número (transformação das referências 1). Estes novos dados incentivam também o professor a aprofundar e diferenciar as suas referências matemáticas sobre os conteúdos e processos de aprendizagem (transformação das referências 2).

No quadro deste ciclo de planificação, ensino e melhoramento um dos objectivos do projecto é o de analisar e descrever o modo como se desenvolve o sentido do número e quais os conhecimentos e processos que resultam desta aprendizagem. Para isso, temos vindo a desenvolver sequências de tarefas que são experimentadas com alunos dos 5 aos 12 anos (uma sequência por ano de escolaridade).

Um exemplo: a construção da tarefa “Comprar brinquedos”

A tarefa “Comprar brinquedos” partia de uma situação inicial em que os alunos dispunham de um conjunto de cartões que simulavam vários animais de brincar e que poderiam ser comprados pelas crianças. Para além dos cartões os alunos dispunham

ainda de duas notas (falsas) de cinco euros e, posteriormente, de três notas. Pretendia-se que os alunos imaginassem que podiam comprar um brinquedo considerando o dinheiro que tinham disponível. Na sequência desta situação inicial foram-lhes colocadas outras questões, mais complexas, pedindo-lhes sempre que explicassem a razão de cada uma das respostas dadas.

Nas indicações para o professor foram identificados como ideias e procedimentos já disponíveis:

- Relações elementares: uma nota de 5 € vale tanto como 5 moedas de 1€; uma nota de 10 € vale tanto como 10 moedas de 1 € e 2 notas de 5 €; uma nota de 20 € vale tanto como 20 moedas de 1 €, 2 notas de 10 € e 4 notas de 5 €.
- Utilizar as ‘imagens’ (representações mentais) dos números e as relações entre as moedas e as notas em situações de cálculo: $6=5+1$; $7=5+2$; $8=5+3$; $9=5+4$; $10=5+5$; $11=[5+5]+1=10+1$; $12=[5+5]+2=10+2$; (...); $15=[5+5]+5=10+5$. $16=10+[5+1]=10+6$; $17=10+[5+2]=10+7$; (.....); $20=10+[5+5]=10+10$

Com a realização desta tarefa pretendia-se que os alunos desenvolvessem um conjunto de ideias e procedimentos tais como:

- Estruturar os preços (tais como 7 €, 12 € e 19 €) utilizando as ‘imagens’ dos números;
- Aprofundar a compreensão das unidades de base do nosso sistema decimal e das relações entre essas unidades com o apoio das relações conhecidas entre as moedas de 1€ e as notas de 5€, 10€ e 20€;
- Operar mentalmente com estas imagens e relações para resolver problemas elementares de adição (preço de dois animais – perspectiva do cliente) e de subtração (dar o troco – perspectiva do vendedor);
- Desenvolver uma forma sistemática de inventariar todas as compras possíveis.

Apresentam-se em seguida algumas sugestões sugeridas nas indicações para o professor.

- O que podem comprar com 2 notas de 5 euros?

O professor daria liberdade aos alunos para observarem tranquilamente cada animal, imaginando o que podiam ou não comprar. Deveria pedir aos alunos que registassem

numa folha as suas escolhas. Depois deveria pedir que cada aluno indique a sua escolha justificando-a (é o animal que prefere, é o que lhe permite gastar menos/mais dinheiro,...). Perante as escolhas feitas pelos alunos, o professor podia perguntar se os alunos gastaram o dinheiro todo, se receberam troco e quanto. A partir desta fase é possível organizar os animais em dois conjuntos: os animais que custam 10 euros ou menos e os animais que custam mais do que 10 euros.

- E se tivessem mais uma nota de 5 euros ?

Esta questão convidava os alunos a adicionar o preço de dois animais para ver quantos animais poderiam comprar com 3 notas de 5 euros. O professor podia, nesta altura, dar uma grande folha de papel a cada grupo para os alunos anotarem os resultados da sua investigação: os grupos de animais que podem comprar com 15 euros (3 notas de 5 euros). Deveria ainda perguntar aos alunos se gastaram o dinheiro todo, se receberam troco e quanto. Todas as respostas deveriam ser justificadas.

- Como saber se encontrámos todos os pares que é possível comprar com 15 euros?

Esta questão podia ser colocada pelo professor ao discutir o trabalho realizado em pequenos grupos. Deste modo, depois de inventariar os resultados obtidos pelos grupos, procurava-se um modo de organizar os pares de animais de forma a ter a certeza que foram encontradas todas as possibilidades. O professor podia sugerir que começassem por inventariar todos os animais que podem comprar juntamente com o urso, que é o primeiro animal da ficha. A partir daqui os alunos podiam usar o mesmo processo mas partindo de um outro animal.

- na loja há animais maiores

O professor podia explicar que na loja se vendem também animais maiores, que custam mais 5 euros que os pequenos e convidar os alunos a calcular e anotar o preço destes animais sem contar. Depois de ter passado o tempo necessário à resolução desta parte da tarefa cabe ao professor orientar a discussão sobre os processos utilizados por cada aluno para efectuar os referidos cálculos. É importante, nesta altura, inventariar as estratégias usadas pelos alunos e realçar os cálculos mais eficazes. A exploração desta tarefa permite a descoberta de várias formas de pensar. Por exemplo, alguns alunos podem estruturar o dinheiro de que dispõem de diferentes formas, considerando apenas grupos de 5 ou utilizando simultaneamente grupos de 10 e de 5.

A implementação da tarefa “Comprar brinquedos”: análise das estratégias usadas pelos alunos

A tarefa “Comprar brinquedos” foi implementada numa turma de 1º ano (6 anos) pela sua professora, elemento da equipa do projecto. A aula em que ela foi explorada foi registada em vídeo por um outro elemento da equipa. Posteriormente, este registo foi visionado e feita a transcrição dos episódios considerados mais significativos do ponto de vista das estratégias de cálculo usadas pelos alunos.

Apresentamos e analisamos em seguida alguns desses episódios, organizados a partir das questões colocadas aos alunos.

- O que podem comprar com 2 notas de 5 euros?

Na resposta a esta questão, as razões apontadas foram muito variadas. Percebeu-se que, alguns alunos, escolheram o animal que custava exactamente o dinheiro que tinham para gastar.

Sara: Escolhia o elefante.

Professora: Porquê?

Sara: Porque tenho o dinheiro certo.

Outros, efectuaram a sua escolha de acordo com a preferência por determinado animal. Para estes, a professora fez perguntas no sentido de saber, face à compra simulada, que dinheiro tinha sobrado. Por exemplo, a Carolina para justificar o troco que receberia recorre à decomposição do 10 e à relação inversa entre a adição e a subtracção.

Carolina: Escolhia o coelho.

Professora: Porquê? E o senhor da loja deu-te troco?

Carolina: O senhor da loja deu-me 3 euros de troco.

Professora: Porquê?

Carolina: Porque 7 mais 3 são 10 e 10 menos 3 são 7.

Para justificar que o troco recebido era insuficiente para comprar mais outro brinquedo, o João Pedro utiliza o dobro de um número, como é ilustrado no exemplo seguinte. O Hugo, ainda no mesmo episódio utiliza uma justificação mais elaborada, integrando a estratégia de cálculo da Carolina e a relação matemática apresentada pelo João Pedro.

Professora: E com o troco (3 euros) podias comprar mais algum?

Carolina: Não porque não chegava para nenhum.

Professora: E quanto dinheiro faltava?

Carolina:...

Inês: 2 euros, se quisesse comprar o urso. Porque 3 mais 2 é 5.

João Pedro: 3 euros, para eu comprar mais uma ovelha. Porque 3 mais 3 são 6.
Hugo: A mim faltavam quatro euros para comprar outro coelho.
Professora: Porquê?
Hugo: Porque 4 mais 3 são 7 e de outra maneira, 4 mais 4 são 8 e menos 1 são 7.

Nem todas as crianças responderam à questão inicial tendo em conta a quantia de que dispunham para comprar o brinquedo. Provavelmente, nestes casos, a resposta foi dada em função das preferências dos animais, sem identificarem, à partida que a quantia disponível era apenas 10 euros. Apesar da resposta estar incorrecta alguns alunos conseguiram calcular o dinheiro que lhes faltava. Por exemplo, o Roberto recorre à decomposição dos números para efectuar a diferença entre 23 e 10. Esta decomposição é feita recorrendo à base 10 e parece ser sugerida pela quantia utilizada (10 euros).

Roberto: Comprava o cão e a girafa
Professora: E quanto custam?
Roberto: O cão custa 12 euros e a girafa custa 11.
Professora: E quanto precisas para comprares os dois?
Roberto: 11 mais 12 são 23. Preciso de 23 euros. Mas o dinheiro não dá.
Professora: E como? Os dois brinquedos custam 23 e só tens 10 euros! Quanto falta?
Roberto: Tiro 10 dos 11 e sobra 1. Somo 12 com 1 e faltam 13. Faltam mais duas notas de 5 e 3 euros, ou 1 moeda de 2 e 1 Euro.

- E se tivessem mais uma nota de 5 euros ?

As respostas a esta questão foram muito variadas e balançaram novamente entre as preferências e a quantia disponível para a compra. Também as estratégias usadas correspondem à utilização da ideia do dobro e à decomposição de um número, neste caso, do 15. É de salientar que estas decomposições foram realizadas de formas diferentes. A Íris recorreu à estrutura do 5, contando de 5 em 5. O Hugo usou estratégias mais elaboradas, na primeira partiu do 15 e recorreu à subtracção (saltos de 10 com compensação) e, na segunda, partiu do 10 e recorreu à adição (saltos de 10).

Íris: Comprava o elefante e o urso
Professora: E quanto custam? Tens dinheiro que chegue?
Íris: Custam 15 euros. Tenho, porque 5 mais 5 (aponta para 2 notas) são 10 e mais 5 (aponta para a outra nota) são 15.

Hugo: Comprava o esquilo (14 euros).
Professora: Porquê? E quanto recebias de troco?
Hugo: Recebia 1 Euro. Porque 15 menos 1 é 14.
Professora: Consegues explicar de outra maneira?
Hugo: 10 mais 4 são 14 e mais 1 são 15.

- Como saber se encontrámos todos os pares que é possível comprar com 15 euros?

Esta questão conduziu ao levantamento de todas as hipóteses possíveis de comprar dois animais, tendo em conta as estratégias explicitadas pelos alunos na questão anterior. Foram efectuados os seguintes registos no quadro, que, numa primeira fase, de uma forma desordenada, à medida que os alunos se iam lembrando.:

5+5+5=15
5+8=13
5+10=15
5+6=11
5+7=12
5+11=16
5+9=14

É de salientar, no entanto, que foi sugestão de um aluno o facto de se ter iniciado este registo a partir do 5 (preço do urso).

Professora: Posso começar por qualquer um? Qual é a melhor maneira de começar?

Aluno: É melhor começar pelo urso.

O registo sistemático a partir do 5 (preço do brinquedo mais barato) conduziu à identificação das restantes situações de uma forma sistemática. Nas justificações apresentadas foram evidenciadas algumas estratégias de cálculo utilizadas surgindo, para cada um dos casos, as estratégias de cálculo e as relações numéricas referidas anteriormente: saltos de 5 e 10, saltos de 5 e 10 com compensação e o dobro de um número. Por exemplo, foram explicitadas justificações tais como:

5+6=11 (porque 6+6 são 12 e menos 1 dá 11
e porque 5+5 são 10 e mais 1 são 11)
5+7=12 (porque 7+3 são 10 e mais 2 são 12
e porque 7+7 são 14 e menos 2 são 12
e porque 5+6 são 11 e mais 1 são 12)
5+9=14 (porque 5+5 são 10 mais 4 são 14
ou 5+10 são 15 e menos 1 são 14
ou 5+8 são 13 e mais 1 são 14)

Depois desta inventariação houve um aluno que identificou o padrão relacionado com a sequência numérica (5,6,7,...) e, a partir daí foram registados todos os casos possíveis de uma forma sistemática. As justificações que foram sendo dadas eram do mesmo nível das que surgiram a partir da situação da compra do urso (5 euros). Além dessas, os alunos recorreram a argumentos do tipo “6+5 é o mesmo que 5+6, pois comprar o urso e a ovelha é o mesmo que comprar a ovelha e o urso”, o que corresponde à utilização da propriedade comutativa da adição.

Na segunda parte da tarefa “- na loja há animais maiores” os alunos recorreram novamente à estrutura do 5, contando de 5 em 5 ou de uma forma mais elaborada fazendo agrupamentos de 10. As estratégias mais eficazes que surgiram relacionaram-se com os saltos de 10, utilizando a adição ou a subtração (saltos de 10 com compensação). A estratégia dos dobros e a propriedade comutativa constituíram também procedimentos eficazes de cálculo. A explicitação do modo de pensar de todos os alunos, parece ter permitido que alunos com mais dificuldades pudessem evoluir na utilização de estratégias de cálculo mais rápidas e eficazes.

Considerações finais

Nesta comunicação caracterizámos o modelo de desenvolvimento e investigação que suporta o projecto DSN-PEC e exemplificámos cada uma destas vertentes:

- a de desenvolvimento, ao explicitar o modo como se concebeu a tarefa “Comprar brinquedos”;
- a de investigação, ao explicitar o modo como iniciámos o processo de análise dos dados recolhidos em sala de aula.

Os dados recolhidos até ao momento correspondem a uma fase inicial do projecto que irá ser continuado durante mais dois anos e meio. De qualquer forma eles começam a esboçar algumas ideias que nos parecem merecer alguma reflexão:

- A construção da tarefa teve como base a preocupação em criar uma situação que naturalmente apelasse à contagem suportada pelos “marcos” 5, 10 e 15. Esta opção, fortemente defendida por vários autores (por exemplo, Gravemeijer, 1997), reflecte a importância dos contextos para veicular estratégias mais “potentes”.
- os alunos conseguem usar estratégias e raciocínios flexíveis de cálculo que não foram ensinados e que constituem um aspecto importante do sentido do número.

Referências

Abrantes, P., Serrazina, L. e Oliveira, I. (1999). *A Matemática na Educação Básica*. Lisboa: Ministério da Educação, Departamento de Educação básica.

- Gravemeijer, K. (1997). Instructional design for reform in mathematics education. Beishuizen, M, Gravemeijer, K.P.E. & E.C.D.M. van Liesthout (Eds.). *The role of contexts and models in the development of mathematical strategies and procedures*. Freudenthal Institute, Utrecht, 13-34.
- McIntosh, A., Reys, B. J. e Reys, R. E. (1992). A proposed framework for examining basic number sense. *For the Learning of Mathematics*, 12(3), 2-8 e 44.
- Simon. M.A. (1995). Reconstructing mathematics from a constructivist perspective. *Journal for Research in Mathematics Education*, 26, 114-145.