Desenvolvendo o sentido do número

Joana Brocardo, Catarina Delgado, Fátima Mendes,
Isabel Rocha, Joana Castro, Lurdes Serrazina e Marina Rodrigues

O desenvolvimento do nosso projecto fez-nos ir estudando, reflectindo, experimentando e discutindo um conjunto de ideias relativas aos números e ao cálculo que tentámos resumir neste texto. Neste texto procuramos explicitar as ideias que consideramos essenciais para facilitar o desenvolvimento do sentido do número. Falaremos de estratégias de cálculo, de modelos, de contextos, de trajectórias de aprendizagem. Mas, tal como Reuben Hersh, acreditamos que resolver problemas e descobrir novos é a essência da matemática. Por isso, procuraremos ter sempre como referência um conjunto de tarefas — na sua maioria problemas ou, investigações – que fomos desenvolvendo e experimentando com alunos.

Começamos por pensar em alguns desafios que se colocam ao professor quanto procura ajudar os seus alunos a desenvolver o sentido do número. Em seguida, procuramos explicitar algumas ideias que consideramos fundamentais para trabalhar os números e as operações e que apoiaram igualmente o desenvolvimento das tarefas que propomos.

Nos pontos *Cálculo com números até* 20 e *Cálculo com números até* 100 *(adição e subtracção)* discutimos aspectos que nos parecem essenciais para desenvolver o sentido do número. Tendo em conta as tarefas que experimentámos focamos a atenção sobretudo nas operações de adição e subtracção. O facto de termos dividido as questões relativas ao cálculo no número 20 não quer dizer que estejamos a propor fronteiras rígidas. No entanto, ao planificar o trabalho, o professor precisa de, numa primeira etapa, começar por estruturar os números até 20. Numa segunda etapa, ancorada no trabalho desenvolvido anteriormente, planificar o cálculo com números até 100. Mas os alunos podem e devem contar e calcular livremente: não tem sentido só propor situações que envolvam, por exemplo, números até 6, só porque formalmente ainda não se *deu o* 6 (esquecendo que os alunos sabem contar *até mais* e que podem e gostam de trabalhar com quantidades maiores).

Terminamos com um ponto dedicado à *linha numérica vazia*. Pareceu-nos importante apresentar e discutir potencialidades deste modelo que não é habitualmente usado no nosso país e que é um dos suportes para a exploração de algumas das tarefas que desenvolvemos.

Desafios para o professor

Podemos dizer que existe uma grande unanimidade em considerar que, essencialmente, o professor deve ter um papel de facilitador da aprendizagem dos alunos. Longe estarão os tempos em que se esperava que o professor explicasse a *matéria*, resolvesse no quadro um ou outro exercício *tipo*, propusesse exercícios de aplicação dos conhecimentos e técnicas explicadas. No entanto, embora as expectativas tenham mudado, ainda persistem nas nossas salas de aula heranças de uma visão tradicional do ensino. Atrevemo-nos a dizer que temos de abandonar uma prática de *dar a matéria* — que se pode ilustrar de um modo sugestivo com a imagem de ir *alegremente picando* os itens do programa à medida que vão sendo dados — e que é indispensável passar para uma prática em que o professor facilita a aprendizagem dos alunos.

Esta mudança implica muitos desafios para o professor. Ouvindo os alunos, esses desafios vão-se concretizando e podemos começar a delinear estratégias para os enfrentar.

Vejamos o seguinte exemplo:

O Manuel, quando tinha 5 anos, comunicou alegremente ao pai:

Manuel: Já sei porque é que 6 mais 7 é 13.

Pai: Ai sim? Então porque é?

Manuel: É porque 6 mais 6 é 12.

Este exemplo evidencia como a noção de dobro pode ser assumida pelos alunos como uma ideia base que facilita o cálculo. Voltaremos a referir-nos a este aspecto quando nos debruçarmos sobre o desenvolvimento de estratégias de cálculo. Por agora, só gostaríamos de salientar que o professor não pode abdicar de ouvir as explicações dos alunos, interrogar-se sobre porque é que dizem determinada *coisa* e não outra, ouvir o modo como explicam os seu raciocínios aos colegas, etc. Não o pode fazer, não só porque deve desenvolver competências de comunicação e argumentação, mas também porque é fundamental perceber o que a criança pensa para a poder ajudar a progredir na aprendizagem. De facto, se o professor do Manuel não lhe perguntar como é que ele sabe que 6 mais 7 são 13, provavelmente não se aperceberá que ele já consegue estruturar o 7 em 6+1 e a soma 7+6 a partir do dobro de 6. Pior ainda, poderia levar o Manuel a regredir na sua construção de relações numéricas se, por exemplo, *explicasse* que sim senhora, que 6+7 são 13 pois basta contar, começar no 7 e contar mais 6: 8, 9, … , 13.

Felizmente a esmagadora maioria dos professores está hoje muito habituado a ouvir os seus alunos e a organizar as aprendizagens a partir do que eles dizem e fazem. Nos pontos seguinte, apresentamos algumas ideias que são referidas nomeadamente por Fosnot e Dolk (2001) e que pensamos que podem sugerir ideias para os professores lidarem com alguns dos desafios que se lhes colocam.

Facilitar o diálogo

Vários autores referem exemplos de como alguns professores tendem a formular perguntas que requerem uma resposta *sim* ou *não* e em que, muitas das vezes, pela entoação da voz, os alunos podem perceber qual é a resposta que o professor espera:

Professor: O João está a fazer bem, não está?

Professor: Assim é mais simples, não acham?

Não é fácil modificar esta tendência, num contexto de sala de aula em que muitas decisões são tomadas em milésimos de segundo e onde se lida com grande imprevisibilidade. No entanto, podemos identificar um conjunto de ideias que o professor poderá procurar ter presente.

É muito importante que o professor peça aos alunos que justifiquem as suas respostas. Desta forma, o professor pode aperceber-se de dificuldades e raciocínios dos alunos. Por exemplo, na aplicação da tarefa *Comprar brinquedos*, percebemos que um dos critérios usados pelos alunos para escolher o animal que podiam comprar com 10 euros foi o de usar todo o dinheiro de que dispunham:

> Sara: Escolhia o elefante.
>
> Professora: Porquê?
>
> Sara: Porque tenho o dinheiro certo.

Para além desta, o professor pode usar outras estratégias para promover um discurso vivo e esclarecedor na aula. Por exemplo, depois de um aluno explicar uma ideia, contrariar a tendência de ser o professor a explicar melhor o que o aluno disse e pedir "Quem consegue explicar de outra forma o que o vosso colega disse?". Explicar de outra forma, para além de clarificar o que foi dito, ajuda igualmente a ouvir os outros e atribuir importância ao que cada um diz. Não é só o que professor diz que é importante.

Há ainda uma grande variedade de perguntas que o professor pode formular de modo a incentivar a troca de ideias entre os alunos. Por exemplo: "Alguém gostava de fazer uma pergunta?", "Quem concorda com o que disse o vosso colega?", "Quem discorda?", Porquê?".

O professor pode ainda propor vários tipos de actividades que facilitem o debate de ideias e processos matemáticos. Fosnot e Dolk referem uma — o congresso de matemática — que nos parece ainda pouco divulgada entre nós e bastante interessante . . . .

Propondo contextos

Vejamos o seguinte episódio ocorrido com uma professora de uma turma de 1º ano, ao propor um problema relacionado com idades:

> Professora: Então pensem lá. A mãe aqui do João Pedro tem . . . João Pedro, sabes qual é a idade da tua mãe?
>
> João Pedro: Sim, tem 34 anos.
>
> Professora: Ora bem, a mãe do João Pedro tem 34 anos. Quantos anos terá daqui a nove anos?
>
> Gonçalo: Oh! Professora, assim não vale. Assim ele já sabe porque é com a mãe dele.

O Gonçalo parece atribuir uma tal importância ao facto de ser um contexto conhecido que até acha que João Pedro terá mais facilidade em resolver um problema que envolva a idade da sua mãe! Embora neste caso não se possa dizer propriamente isto, ele recorda-nos algo que todos sabemos: o trabalho em torno de contextos conhecidos dos alunos facilita a sua aprendizagem. Quando um professor coloca uma questão a propósito de uma situação que os alunos conhecem bem e a que, de alguma forma, se sentem ligados, muita coisa já está ganha: os alunos entusiasmam-se, falam sobre o contexto apresentado, propõem estratégias para abordar a questão colocada. Intimamente ligada com este aspecto e também com a relevância de uma formação matemática que permita lidar com os problemas do dia-a-dia, as indicações curriculares enfatizam a importância de propor contextos relacionados com as experiências e com a vida de todos os dias.

No entanto, quando se pretende que os alunos desenvolvam, por si próprios, ideias e procedimentos matemáticos, torna-se igualmente importante pensar em contextos que o favoreçam. Estes devem exigir do aluno um certo esforço de organização e elaboração, resultante, por exemplo, dos dados fornecidos e das operações envolvidas no problema. As estratégias utilizadas pelos alunos na resolução dos problemas, dependerão, não só, das suas opções pessoais como também do contexto que lhes é apresentado. Assim, as situações de contextos funcionam, simultaneamente, como ponto de partida e como fonte de aprendizagem da matemática. Esta é uma ideia importante na *matemática realista* e que, neste projecto, temos vindo a perseguir.

Analisemos um exemplo que pode ajudar a explicitar a importância de desenvolver intencionalmente determinados contextos. Na tarefa *A máquina de bebidas* (ver figura 1) a par da exploração de um contexto conhecido dos alunos pretendíamos que os alunos utilizassem as decomposições dos números até 20 para resolver problemas aditivos.

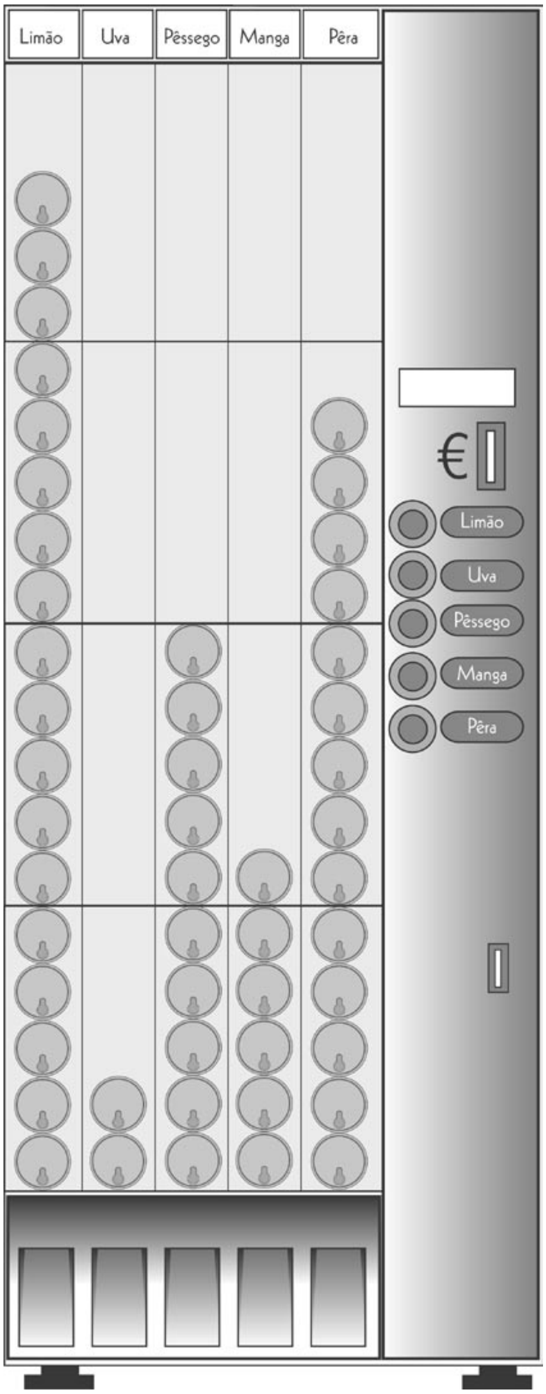


Figura 1. A máquina de bebidas

No entanto, queríamos que os alunos estruturassem as quantidades em grupos facilitadores da contagem — 5+1=6; 10=5+5; [10+5+3]18+2=20; 10+4=14 — e não que usassem técnicas menos *potentes* como, por exemplo, a contagem 1 a 1. Era importante apresentar uma imagem com uma máquina em que fosse fácil estruturar o número de latas em grupos de 5 e de 10. Deste modo, as divisões horizontais não foram casuais: elas foram intencionalmente pensadas para favorecer a estruturação das contagens. Nesta tarefa, pretendíamos também que os alunos começassem a perceber a relação inversa entre a adição e subtracção e utilizá-la para resolver problemas — 14+6=20 logo 20-6=14; 18+2=20 logo 20-2=18. Por isso, o número de latas que se colocou em cada coluna não foi arbitrário: na segunda coluna estão 2 latas, precisamente o número que falta à primeira coluna para estar completa.

Um outro contexto a que recorremos em várias tarefas foi o do dinheiro. A sua estruturação *natural* em grupos (notas e moedas) de 5, 10, 20, 50, e 100, favorece a utilização de estratégias de cálculo mais potentes. Por isso, não abdicámos de, logo no 1° ano, apresentar e explorar este contexto, como exemplificamos na tarefa *Comprar brinquedos*. Também a estruturação em euros e cêntimos constitui um óptimo contexto para introduzir e trabalhar os números decimais. A tarefa *Uma ida à florista* é um exemplo, proposto para o 2° ano, para uma abordagem inicial aos números decimais.

Medições de comprimentos e pesos, velocidades e distâncias, números em moradas, unidades horárias (horas, meias-horas, quartos de hora, minutos), tamanhos de roupa e sapatos, números de páginas, resultados de jogos, números nos calendários e datas são alguns exemplos de outros contextos que se relacionam com as experiências do dia-a-dia dos alunos e que favorecem o surgimento de ideias e procedimentos matemáticos.

Organizando propostas de natureza diferente

Cabe ao professor seleccionar, adaptar ou imaginar as tarefas que propõe aos seus alunos. Para tal, um dos princípios que nos parece importante ter presente é o da diversidade. Este princípio esteve igualmente presente nas tarefas que desenvolvemos. Todas tinham como objectivo contribuir para desenvolver o sentido do número. No entanto, a sua natureza foi intencionalmente diferente: propusemos investigações, problemas e exercícios pensados para praticar determinadas técnicas de cálculo.

A tarefa *Como é possível?* é um exemplo de uma investigação. Os alunos são convidados a comparar diferentes estratégias, a formular conjecturas, a organizar e testar relações. Os alunos podem investigar diferentes relações e padrões numéricos.

Tarefas como *Calculando como a Luísa* são exemplos de problemas. Os alunos devem analisar e interpretar um dado contexto e procurar uma estratégia adequada para responder às questões colocadas.

Calculando em cadeia é um exemplo de uma tarefa menos usual no nosso ensino. Trata-se de uma proposta especialmente pensada para ilustrar o uso de determinadas estratégias e para desenvolver o cálculo mental. É importante que o professor tenha presente que os alunos não o desenvolvem a partir *do nada* e que é indispensável que este aspecto seja objecto de um trabalho explícito. Todos os dias, durante 10/15 minutos o professor pode desafiar os alunos e orientar uma discussão em torno de propostas que tenham como objectivo desenvolver estratégias de cálculo mental.

Cálculo com números até 20

É hoje indiscutível a importância das primeiras aprendizagens matemáticas das crianças na formação da sua futura predisposição para a aprendizagem desta ciência, bem como nas suas convicções acerca das suas capacidades matemáticas.

Contar é uma das primeiras experiências matemáticas das crianças. Os números, sendo propriedades de conjuntos de objectos, não são, no entanto, uma propriedade física. É talvez por este motivo que constituem um desafio especial para as crianças.

Para Piaget (1964), a construção do número progride de acordo com o desenvolvimento da lógica e do período pré-numérico, que nas crianças até aos 5/6 anos corresponde ao período pré-lógico. Piaget afirma que as crianças desta idade podem saber contar mas não compreender a ideia essencial do número ou seja que quando ocorre qualquer mudança no *arranjo* dos conjuntos, o número de objectos permanece o mesmo. Este aspecto está relacionado com o conhecimento do valor cardinal do número e Piaget reforça a relação entre a correspondência um para um e a conservação.

Posteriormente, Gelman e Gallistel (1978) contrariaram esta posição defendendo que é a partir da contagem que são construídos os primeiros conceitos numéricos e aritméticos. O conhecimento da sequência numérica é fundamental e funciona como ponto de partida para o raciocínio aritmético informal, bem como para o princípio da inclusão hierárquica. A competência de contagem permite, assim, às crianças, a aquisição de instrumentos importantes quando procedem a comparações quantitativas, capacitando-as para resolverem problemas aritméticos usando estratégias de contagem que modelem o conteúdo do problema.

Dolk e Fosnot (2001) referem um modelo segundo o qual as competências básicas das crianças se vão automatizando permitindo a sua coordenação e combinação, dando origem a competências mais complexas criando-se, assim, uma hierarquia de competências. Apresentam três competências numéricas: contagem oral, contagem de objectos e relações numéricas.

1. *Contagem oral* — resulta da combinação de outras competências básicas, a saber: a sequência dos números com um só digito, que o nove indica transição, os termos da transição para uma nova série e as regras para gerar uma nova série e as excepções às regras[1].

Afirmam que as crianças de cinco anos, apesar de conseguirem contar até nove, dezanove ou vinte e nove, desconhecem, muitas vezes, o termo para iniciar a nova dezena e ainda não adquiriram confiança no facto de que o nove inicia uma nova série. Mostram, no entanto, alguma capacidade no que respeita à inclusão hierárquica (sabem que o oito vem antes do nove e o dezasseis depois do quinze).

Por exemplo, na tarefa das *caixas*, percebemos que as crianças mediante a necessidade de continuar a contagem reutilizaram algumas das sequências aprendidas

1, 2, 3, 4, 5, 6, 7, 8, 9, 6, 8, 7 ou 1, 2, 3, … , 11, 12, 13, 8, 9, 10, …

vinte oito, vinte e nove, vinte e dez, vinte e onze, …

ou …, 1, 2, 3, … , 10, 11, … , 20, 21, … 39, 70, 71

no entanto, algo lhes falta ainda na aprendizagem da contagem.

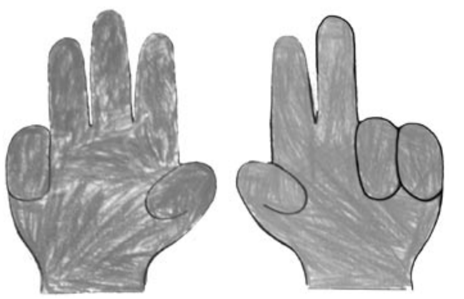
[1] Em Portugal as excepções às regras vão do 11 ao 15.

2. *Contagem de objectos* — engloba outras competências: a sequência da contagem, que a cada objecto corresponde uma palavra de contagem, como não esquecer nenhum objecto nem o repetir e a cardinalidade (reconhecer que o último termo corresponde ao total contado).

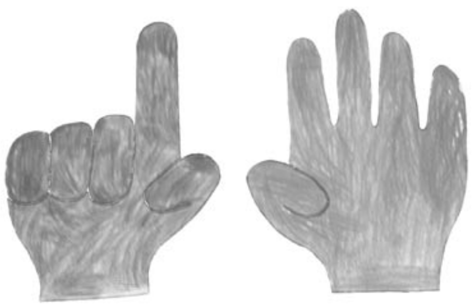
Afirmando, novamente, que aos cinco anos as duas primeiras competências estão já adquiridas, no que respeita à terceira, os autores referem alguma dificuldade na definição de estratégias que evitem saltos ou esquecimentos, particularmente em conjuntos muito numerosos e/ou dispostos de forma não ordenada.

Assim, será de proporcionar múltiplas e diversificadas experiências de contagem que lhes permitam desenvolver estratégias de contagem progressivamente mais eficientes. Estas experiências proporcionadas devem também apresentar materiais já estruturados que facilitem a contagem ou a leitura da contagem.

Por exemplo, na tarefa das *caixas* encontraram-se crianças que tendo realizado a contagem correctamente respondem ter contado outro valor de objectos na caixa, o número total de objectos da caixa é diferente do último objecto contado da caixa. Também aqui, algumas crianças, quando se tratava de 32 objectos, sentiram a necessidade de arrumar, por cor, os materiais antes de iniciar a contagem. Esta foi, por vezes, realizada espontaneamente por subgrupos (de cor) e só depois então o total.

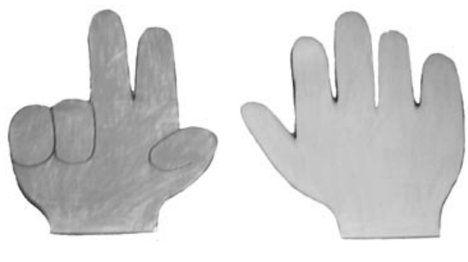


Mostra 5 dedos usando as 2 mãos (5=3+2)



Mostra 5 dedos usando as 2 mãos (5=1+4)

4+5+5=4+10=14



2+5=7

Figura 2: Utilização das mãos como auxiliar na contagem

Um dos *materiais* mais acessíveis é a mão com os seus 5 dedos (Figura 2). Permite-nos colocar questões ao mostrar alguns dedos das mãos abertos e outros encolhidos: 1 mão e dois dedos, 2 mãos, 2 mãos e 4 dedos, 3 mãos e 1 dedo ou ainda se duas crianças estenderem as mãos com os dedos abertos quantos dedos devemos contar.

Embora a utilização de materiais não estruturados (Figura 3) na contagem seja importante devem também ser utilizados materiais estruturados em bases de 5 e 10 (Figura 4).

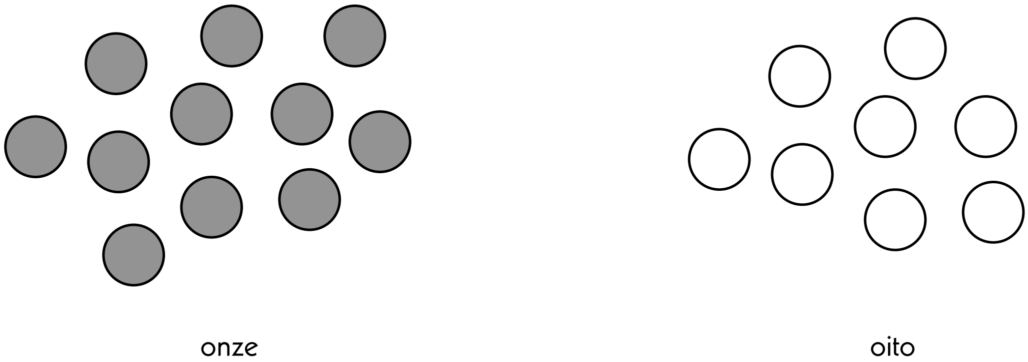


Figura 3. Material não estruturado

Podem-se construir alguns materiais estruturados de apoio a uma eficaz contagem e que em simultâneo permitem visualizar a comparação entre números. Por exemplo, a construção de enfiamentos em que as contas são introduzidas (por cor) de 5 em 5, ou torres com a mesma característica (ver Figura 4). Assim, a criança é induzida a fazer uma contagem, a partir de 5, de 5 em 5, ou a partir de 10 e de 10 em 10.

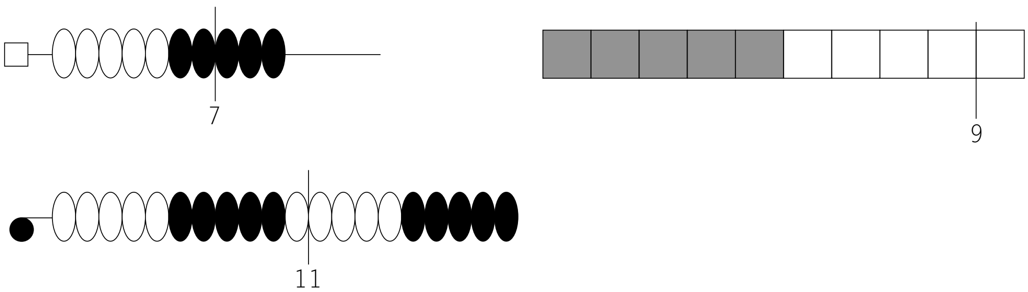


Figura 4. Material estruturado

Como exemplo, na tarefa *máquina das bebidas* o modo como a máquina está representada lança um suporte de contagem 5 a 5 e a existência de uma fila de 10 latas favorece a contagem a partir de 10.

Muitas vezes a escola utiliza alguns materiais de mercado que estão agrupados (iogurtes que são vendidos em embalagens de 4 ou 6, caixas de ovos em embalagens de 6 ou 12, paletes de leite escolar em embalagens de 27), no entanto é preferível utilizar agrupamentos de 2 ou de 5 uma vez que estes ao serem divisores de 10, facilitam a posterior construção do sistema decimal.

3. *Relações numéricas* — desenvolvem-se em simultâneo com a capacidade de contagem de objectos.

Assim, será de proporcionar múltiplas e diversificadas experiências com materiais estruturados ou não que facilitem o estabelecer de relações numéricas e permitam às crianças desenvolver composições e decomposições numéricas.

Por exemplo, na aplicação da tarefa *berlindes* que apresenta uma caixa de oito berlindes e o educador permite à criança retirar berlindes (1 ou 2) para indicar o total dos que permanecem no interior da caixa e a criança recorre aos dedos para responder.

Outro exemplo, na tarefa *dominó*, a utilização em jogo apenas das peças cuja soma é 8, permite às crianças observar peças que tendo o mesmo total apresentam em cada lado padrões de pintas diferentes, e portanto vão estabelecendo relações.

O apoio em materiais já estruturados (Figura 5) permitem visualizar e enfatizar essas relações.

Utilizando as duas mãos:

› indicar 5 dedos — pode ser apresentado como 3 e 2 ou 1 e 4 ou 2 e 3

› indicar um nº igual de dedos em cada mão e perguntar o total

› apresentar pratos de pontos de cor diferente

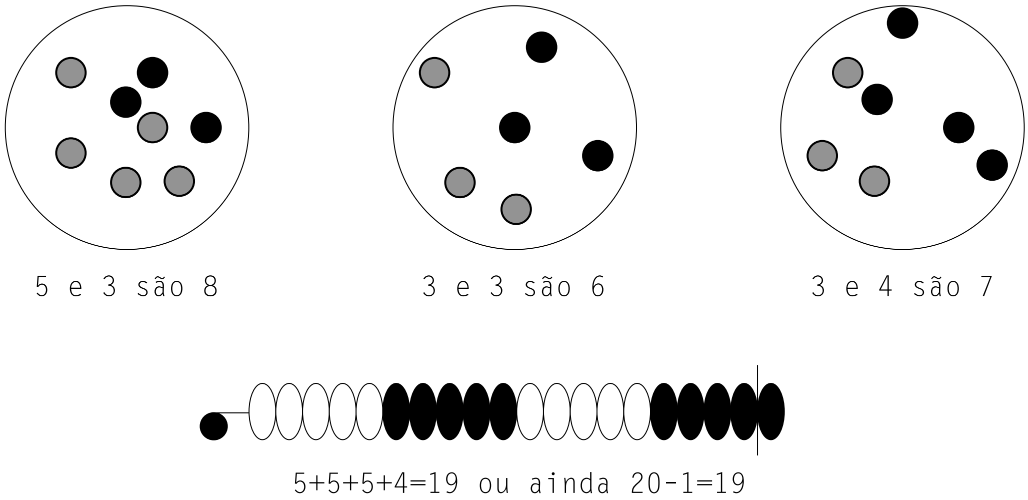


Figura 5. Materiais estruturados

As crianças utilizam os seus conhecimentos informais de aritmética para resolverem oralmente problemas simples envolvendo adições e subtracções. A adição e a subtracção de números com um só dígito, é uma competência acessível a crianças de cinco anos. As experiências iniciais de contagem promovem a compreensão do sentido destas operações. Modelando as situações, as crianças mostram alguma capacidade de resolver problemas aditivos ou subtractivos utilizando estratégias de contagem cada vez mais eficientes e complexas.

É frequente no dia a dia do jardim de infância aparecerem problemas do tipo: Na mesa estão 7 canetas se vos der 5, com quantas ficam? Embora muitas crianças as contem desde o início, algumas já resolvem contando a partir de 7 até 12 ou chegam mesmo a dar explicações do tipo "12, já fiz muitas vezes, porque 6 e 6 é 12 e é o mesmo que 7 e 5".

Embora a investigação demonstre que a separação entre o cálculo com números até 10 e o cálculo com números até 20 é artificial, tradicionalmente, a escola divide-o em dois níveis que envolvem competências distintas. O cálculo com números até 10 pressupõe uma aprendizagem consistente do sentido da adição e da subtracção, bem como das decomposições numéricas envolvendo estes números (por exemplo responder mentalmente ou com apoio em material a questões do tipo 2+2=4, 3+3=6, 6+1=7, 8-2=6, 9-4=5, ...). O cálculo com números entre 10 e 20 está já associado à capacidade de estruturar o cálculo em torno do número 10 (por exemplo, 8+6=8+2+4; 15-8=15-10+2).

No pré-escolar, a organização da aprendizagem dos números deve deixar lugar à espontaneidade e improvisação, devendo haver o progressivo planeamento das actividades tendo em vista um maior conhecimento dos números. A sequência numérica é usada consoante as crianças (quase sempre até 10, algumas vezes até 20 ou mais), através da oralidade, da contagem de objectos e da realização de jogos que envolvam números. A utilização de materiais manipuláveis que apoiem a estruturação do cálculo é indispensável.

No início do ensino básico (1º ano de escolaridade) as linhas de acção referidas anteriormente devem ser prosseguidas, quer na forma, quer no conteúdo. Os contextos utilizados fornecem a base concreta para a passagem para o cálculo estruturado bem como para o desenvolvimento de estratégias inteligentes de cálculo mental.

A utilização de contextos reais constitui uma componente da literacia matemática elementar. É a partir destes contextos que se faz a ligação aos métodos informais de cálculo utilizados pelas crianças.

Dolk e Fosnot (2001) consideram que existem três níveis de cálculo que se vão desenvolvendo desde o pré-escolar

› *Cálculo por contagem*, apoiado em materiais que permitam a contagem;

› *Cálculo por estruturação*, sem recorrer à contagem e com o apoio de modelos adequados;

› *Cálculo formal*, com a utilização dos números como objectos mentais para atingir competências de cálculo inteligentes e flexíveis, sem a necessidade de recorrer a materiais estruturados.

É imprescindível a ligação aos métodos informais de cálculo utilizados pelas crianças (sobretudo no âmbito dos números inteiros inferiores a vinte), bem como a atribuição de significados reais a esses números, ligando-os às vivências dos alunos. É a partir da contagem pelos dedos que a compreensão primária dos factos matemáticos tem início, devendo facilitar-se a transição do cálculo baseado na contagem para o cálculo estruturado, permitindo que os alunos memorizem, por si próprios, os procedimentos necessários, por exemplo, decompondo um número em partes iguais, organizando números em grupos de cinco ou realizando contagens através de enfiamentos agrupados.

Por exemplo na aplicação da tarefa *comprar brinquedos* o professor pode propor inventariar todos os preços dos animais estruturando o dinheiro de diferentes maneiras a partir do 5

5, 6=5(1), 7=5(2), 8=5(3), …

Também na aplicação da tarefa *copos de sumo* o problema 4 promove as contagens de 5 em 5 e de 10 em 10

5, 10, 15, 20, 25, … ou 10, 20, 30 …

Estas estruturas numéricas permitem um mais rápido e eficaz manuseamento, pelo que, por exemplo, o recurso à linha numérica, à decomposição de números e à sua ordenação deve ser incentivado. Deste modo será facilitada a compreensão dos números, não só como um conteúdo mas também como uma estrutura, formando uma rede de relações cada vez mais complexa. No mesmo sentido, ao serem utilizadas contagens em situações relacionadas com um determinado contexto (no seguimento da contagem de objectos concretos), vão sendo criadas as bases conceptuais necessárias à adição e à subtracção. Os alunos aprendem a realizar adições e subtracções, identificando a estrutura subjacente a cada operação, compreendendo as suas variadas manifestações (juntar, acrescentar, retirar, comparar) em contextos variados. Ao explicitarem o que fizeram, aprendem a reflectir sobre as suas operações mentais, num processo de transição do concreto para o abstracto, estimulando níveis superiores de raciocínio. Centremo-nos, então, em estratégias facilitadoras da passagem do cálculo por contagem para o cálculo por estruturação. Por exemplo na aplicação da tarefa *comprar brinquedos* quando aparece

7+5 é 12 porque 6+5=11 e 1 é 12

7+3=10 e 10 e 2 são 12

Dolk e Fosnot (2001) consideram três modelos:

- *Modelo linear* — modelo adequado à sequência numérica. Enfiamentos; torres de cubos de encaixe, ... Esta representação estabelece a ligação à sequência numérica e está adequada a contextos de estrutura linear ou sequencial (exemplo páginas do livro, idades, datas, ...).
- *Modelos de agrupamento* — os números podem ser agrupados e divididos em unidades, grupos de 2, 5 e 10. Estes agrupamentos facilitam a representação e a visualização. (Exemplos: pares de sapatos, mãos, tracinhos agrupados de 5 em 5, moedas de 5, 10, 20 cêntimos e 1€, ...)
- *Modelo Combinado* — combinação de modelo linear e do modelo de agrupamento. Ábaco horizontal ou ábaco de duas filas. Este modelo facilita a contagem (exemplo: autocarro de dois andares).

Numa fase posterior deve ser incentivada a utilização de estratégias de cálculo variadas na resolução de problemas em contexto, no sentido de, gradualmente, se ir passando de um cálculo baseado em modelos, para um cálculo aritmético e formal.

Vejamos um exemplo:

Duas crianças, pretendem fazer um colar. Uma tem na mesa 6 peças (5 amarelas e 1 azul) e outra 7 peças (5 vermelhas, 1 verde e outra laranja). Quantas peças vai ter o colar? A criança pode:

- fazer o cálculo por contagem: 1, 2, ... 13
- fazer o cálculo por estruturação: agrupar 5 peças amarelas, agrupar 5 peças vermelhas e 1 verde 1 azul e outra laranja, e sem efectuar contagens associar os grupos de 5 e dizendo 5 amarelas, 5 vermelhas e estas — 5, 10, 11, 12, 13
- fazer o cálculo por combinação: eu tenho 5 amarelas e uma azul, tu tens 5 vermelhas uma laranja e uma verde, ou seja ficam 5 amarelas, 5 vermelhas e estas — 5, 10, 13
- fazer cálculos formais:
    - utilizar os enfiamentos para aproximar a linha numérica (figura 6)

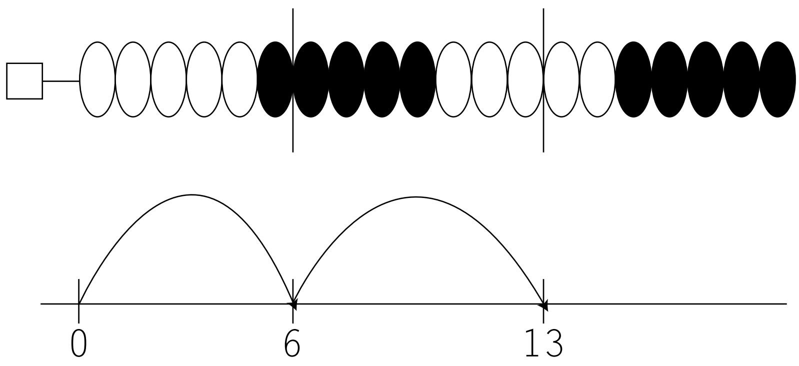


Figura 6. Enfiamentos e linha numérica

- Decompor o 6 e o 7 em agrupamentos de 5 (6=5+1, 7=5+2)

  +5 +3

  5→10→13

- Começar por uma aproximação à dezena (6, 7=4+3)

  +4 +3

  6→10→13
- começar por uma aproximação ao dobro de 6 (6, 7=6+1)

  +6 +1

  6→12→13
- começar por uma aproximação ao dobro de 7 (6=7-1, 7)

  +7 -1

  7→14→13

É fundamental ter-se consciência que cálculos deste tipo pressupõem necessariamente um trabalho anterior de múltiplas experiências de decomposição de números (manipulativa, oral, estrutural e mental).

Nesta fase, as actividades devem apelar ao raciocínio a partir de relações conhecidas, podendo já utilizar alguma notação convencional.

Cálculo com números até 100
Adição e subtracção

Ao expandir o universo numérico até cem, também se alargam as situações reais do quotidiano, nas quais os números surgem inseridos: preços, idades, número de páginas, tamanhos de roupa e sapatos, quantidades, distâncias, medidas de peso e de comprimento, ... O conhecimento do significado dos números num dado contexto constitui uma componente da literacia quantitativa que envolve uma matemática activamente relacionada com o mundo que nos rodeia.

De igual modo as operações de adição e subtracção devem surgir inseridas na exploração de problemas em contextos reais, ou seja, problemas que se relacionem com a experiência e vivência dos alunos, porque assim eles irão usar os seus conhecimentos e métodos informais para os resolver, dando um significado real a estas operações. A adição surgirá, então, associada a situações de *juntar*, *acrescentar*, a subtracção aparece como *tirar*, *retirar*, *separar* e ainda devem ser consideradas situações que envolvam *comparar* e *igualar*.

O desenvolvimento do sentido do número surge muito associado à aquisição de destrezas de cálculo mental, porque estas destrezas requerem um bom conhecimento e compreensão dos números e das relações entre eles.

Uma das características das estratégias de cálculo mental é a sua flexibilidade e variabilidade. Os alunos têm de perceber que não existe uma considerada a *melhor*, mas que são várias as estratégias disponíveis ajustáveis aos números em causa, para que se sintam confiantes em usar aquela que surgiu da sua forma de pensar sobre os números envolvidos ou que foi melhor compreendida. De salientar que com estas estratégias flexíveis de cálculo mental, as contas não são apenas feitas de cabeça, mas com a cabeça e é encorajada a representação dos cálculos por escrito.

Tal como com os números até vinte, nos cálculos com números até cem também se tem em atenção os níveis sucessivos em que os alunos aprendem a calcular: cálculo por contagem, cálculo por estruturação e cálculo formal e flexível.

É fundamental ter em atenção que nas actividades de contagem os principais obstáculos são: o passar de uma dezena para a seguinte e contar por ordem decrescente. A utilização do colar de 100 contas dividido em intervalos de dez, com cores diferentes para cada grupo de dez, pode facilitar a ultrapassagem desses obstáculos, passando depois à utilização da linha numérica como uma forma esquematizada do colar.

Ao associar a linha numérica e o colar de contas estamos a organizar e estruturar os números de acordo com o modelo linear, que permite aos alunos orientarem-se na sequência dos números, descobrindo relações numéricas.

Tal como na contagem até 20, para além do modelo linear, os números podem ser estruturados considerando o modelo de agrupamento ou o modelo combinado.

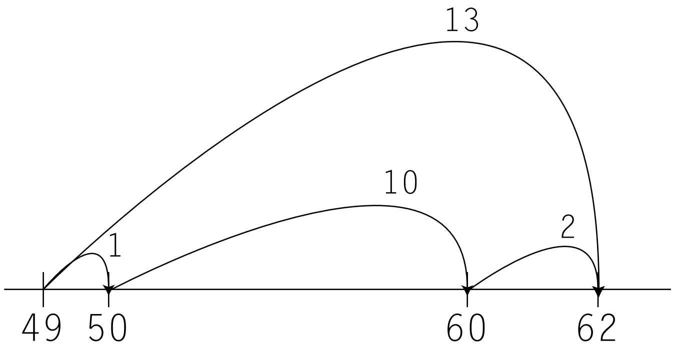
No modelo de agrupamento, a representação mais utilizada pelos alunos é o agrupamento de objectos em conjuntos de dez ou utilização de objectos que surgem agrupados.

No modelo combinado os números até cem podem ser representados num cartão com uma quadrícula de 10 por 10, ou ainda através de um quadrado de 10 por 10. No entanto as suas vantagens para o cálculo já não são tão evidentes como com os números até 20 em que objectivo é a automatização de adições e subtracções elementares.

Com números superiores a 20, os alunos já não deverão recorrer tanto ao cálculo por contagem, mas ao cálculo por estruturação e surgem alunos já a utilizar a decomposição dos números em dezenas e unidades para adicionar ou subtrair, sendo este já o nível do cálculo formal.

As estratégias que serão estimuladas para a transição destes níveis (saltos de dez em dez, saltos até à dezena mais próxima, ...) devem ser explicitadas oralmente entre os alunos e deve ser contemplado o recurso à representação esquemática. Surge aqui a utilização, já referida, da linha numérica vazia (sem marcações) como uma ferramenta didáctica que ajuda a explicitar muitas das estratégias de cálculo mental e ajuda a promover o desenvolvimento de estratégias mais sofisticadas.

No problema 2 apresentado na tarefa *Calculando como a Luísa* (62 alunos da escola da Leonor têm um animal de estimação: um cão ou um gato. Se souberes que 49 desses alunos têm um cão, consegues saber quantos têm um gato), uma das resoluções foi obtida pensando no número que é necessário adicionar a 49 para obter 62 com a representação na linha numérica vazia do caminho seguido, em que o processo se desenrola da seguinte maneira:



- salta até 50 porque está mais próximo de 49
- a partir de 50, 62 pode ser alcançado com um salto de dez e um salto de 2 (para a frente).

Ao utilizar esta representação esquemática, os alunos estão a transitar para o nível de cálculo por estruturação.

A estratégia utilizada é habitualmente designada por *salto até à dezena mais próxima ou adição para chegar à dezena mais próxima*, porque se começa por saltar até à dezena mais próxima e depois salta-se pelos múltiplos de 10.

Quando os alunos já não precisam de usar esta ou outro tipo de representação esquemática e conseguem efectuar estes cálculos mentalmente, registando todos ou alguns dos passos seguidos, já estão no nível de cálculo formal. No caso deste problema e do procedimento utilizado, o nível formal pode surgir da seguinte forma:

$49 \xrightarrow{+1} 50 \xrightarrow{+10} 60 \xrightarrow{+2} 62$, logo a resposta é 13 gatos porque é 1+10+2=13

ou

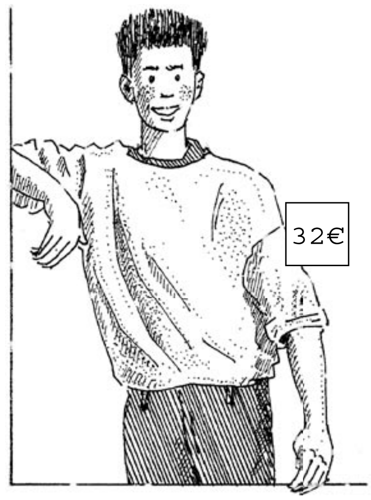
49+1=50; 50+10=60; 60+2=62, logo a resposta é 13 gatos porque
1+10+2=13

O mesmo problema pode ser representado e resolvido pela subtracção 62-49 e utilizando esta mesma estratégia mas saltando no sentido inverso:

$62 \xrightarrow{-2} 60 \xrightarrow{-10} 50 \xrightarrow{-1} 49$

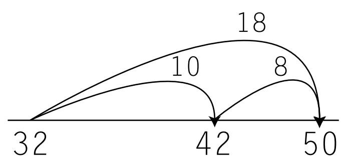
62-2=60; 60-10=50; 50-1=49 logo a resposta é 13 gatos porque
2+10+1 =13

Esta estratégia também está evidenciada na tarefa *Como é possível?*.



O Vasco paga esta camisola com uma nota de 50 euros. Quanto recebe de troco?

No entanto surgem outras estratégias, mesmo interpretando a subtracção como parte dum todo 32+?=50



32+10=42; 42+8=50
8+10=18

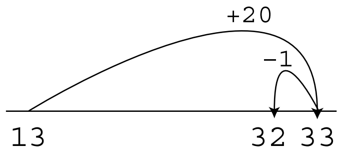
$32 \xrightarrow{+18} 42 \xrightarrow{+8} 50$

Este procedimento é designado por *saltos de dez em dez,* uma vez que partindo de um número e dando saltos de 10 se pretende chegar a outro número.

Uma variante deste procedimento é o *método dos saltos com compensação* (usar saltos de dez e compensar), que a tarefa *Calculando em cadeia* permite estimular porque numa das *cadeias* apresentadas um dos números que se adiciona tem o algarismo das unidades igual a 9.

Foi esse o caminho seguido por alguns alunos ao calcular 13+19:

13+19



Comecei por somar 20+13 *que dá* 33, *como tinha juntado* 1 *ao* 19 *tive de o tirar ficou* 32.

Juntei 13+10 *que deu* 23. *Pus na cabeça o* 10 *e juntei ao* 23 *deu-me* 33, *mas tirei* 1 *porque era o* 9 *e não o* 10 *e ficou* 32. *Eu fiz com o dez porque era fácil.*

São estas estratégias que facilitam a transição do cálculo por estruturação ao cálculo formal. Aliás no seguimento destas, outras estratégias podem surgir, já ao nível mais formal quando os alunos já compreendem as propriedades da adição:

56+39=55+40=95 (*o que vou adicionar a uma parcela subtraio na outra*)

Mas também está presente nesta estratégia o obter a dezena mais próxima de um dos números (neste caso do 39).

Ainda na tarefa *Calculando em cadeia*, surgem, também no nível formal, as *estratégias de decomposição* e a dos dobros e *quase dobros*:

30+31 *(Dobros e quase dobros)*
Para calcular 30+31 *sei que* 30+30=60 *(porque* 3+3=6*) então é* 60+1=61.

60-31 *(Dobros e quase dobros)*
Sei que 60-30=30 *(porque* 6-3=3*) então como vou tirar mais um é* 30-1=29

13+29 *(decomposição)*
Somei 20 *mais* 10 *que eram as dezenas e deu* 30. *Depois juntei as unidades* 9 *mais* 3 *e deu* 12. *No fim juntei* 30 *mais* 12 *e deu* 42.

Primeiro fiz 23 *mais* 13 *que deu* 36, *mas como tirei* 6 *agora vou ter que os acrescentar e ficou* 42.

Em relação à subtracção, a estratégia da decomposição dos números em dezenas e unidades conduz facilmente a erros pelo que terá de ser utilizada com muitas reservas e cautelas:

56-39 ?

50-30=20	9-6=3	20+3=23	(erro frequente)
16-9=7	40-30=10	56-39=7+10=17	(utilização correcta da estratégia)

Em todos estes procedimentos, à excepção do método da decomposição, verifica-se outra característica das estratégias de cálculo mental, que é o facto de se lidar com os números como um todo e não com os dígitos separados.

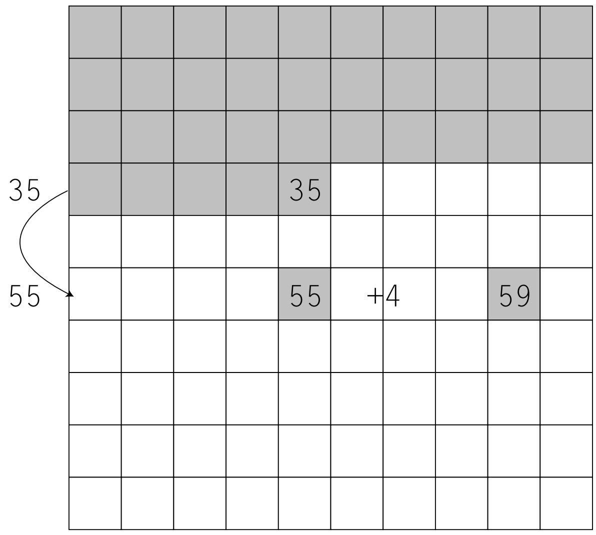
Linha numérica vazia

Para se poderem perceber as potencialidades da linha numérica vazia é importante fazer uma breve descrição de algumas das características do cálculo associado aos materiais tradicionalmente utilizados no 1º ciclo, tais como o MAB, os cubinhos de encaixar ou o quadrado dos cem.

O MAB (material multibásico) e os cubinhos de encaixar costumam ser utilizados para a representação dos números em centenas, dezenas e unidades e ainda para justificar os algoritmos das operações, principalmente o da adição. São identificadas algumas desvantagens no trabalho com o MAB ou com os cubinhos de encaixar, nomeadamente que os alunos demoram muito tempo a utilizá-los, obtêm os resultados de forma passiva e, além disso favorece a contagem um a um. Deste modo, a actividade mental provocada pela sua utilização é baixa e os alunos não evoluem para estratégias mais inteligentes.

Por exemplo, ao usar o MAB para auxiliar um cálculo aditivo, representa-se cada um dos números, separando as dezenas das unidades e, para se obter o resultado, basta adicionar separadamente. E, se for utilizado o mesmo procedimento para auxiliar um cálculo que envolve a subtracção, muitas vezes surgem dificuldades que provocam alguns erros de cálculo. O procedimento de cálculo evidenciado pelo MAB é o *método da decomposição,* visto que cada número é decomposto em centenas, dezenas e unidades, e que, ao serem efectuados os cálculos, estas são trabalhadas cada uma por si, ou seja, separadamente.

O *quadrado dos* 100, na figura seguinte, foi um modelo muito utilizado nos anos oitenta, na Holanda, que apoiva o cálculo e até servia para a representação dos números até 100.



35+24 via 35+10+10=55 e 55+4=59 logo 35+24=59

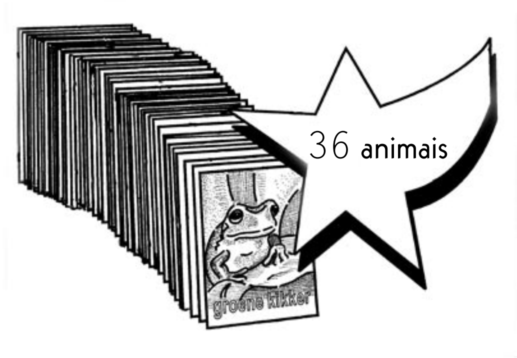
Tal como está exemplificado na figura anterior, permite também a representação dos procedimentos de cálculo na adição ou na subtracção. Este modelo tal como está organizado, evidencia outra estratégia de cálculo, pois estimula a formação de um padrão de sequências, contando de dez em dez, a partir de um número. Esta estratégia de cálculo é o *método dos saltos* visto que, a partir de um número inicial, são adicionadas ou subtraídas dezenas. No caso do exemplo, parte-se do 35, adiciona-se 10 e mais 10, chega-se ao 55. Finalmente adiciona-se 4 e obtemos o resultado final, 59.

Apesar deste modelo até dar ênfase à estratégia mais eficaz de cálculo, verificou-se que era de difícil utilização pelos alunos mais fracos e que deixa pouco espaço para registar as estratégias informais dos alunos.

Todos os materiais tradicionais foram desenvolvidos para facilitar processos de cálculo mas nem sempre são fáceis de utilizar e, além disso não promovem a evolução das estratégias de cálculo mental. Surge assim, neste contexto, a linha numérica vazia, inicialmente identificada como um modelo dinâmico de representação linear da sequência dos números, ao contrário da representação estática veiculada pelo MAB, por exemplo.

A linha vazia é um modelo que foi desenvolvido a partir dos registos informais que as crianças fazem quando começam a contar.

Vejamos a situação seguinte e como pode ser resolvida pelos alunos.

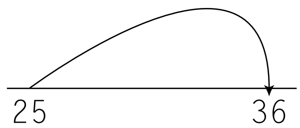


Há 36 cromos diferentes. A Inês já tem 25 cromos.

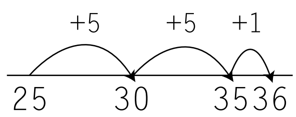
Quantos cromos lhe faltam para ter a colecção completa?

Uma criança pode partir do 25 e ir contando até ao 36. Pode mesmo fazer *riscos* no seu caderno que apoiam essa contagem. Daí passa-se com facilidade para o registo sobre uma linha vazia:

25| | | | | | | | | | |36

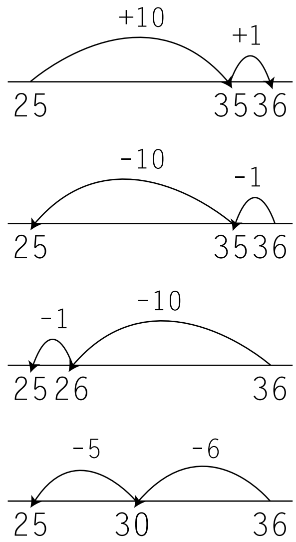


Assim, uma das características da linha que a tornam uma ferramenta didáctica muito potente é que permite registar os procedimentos informais de resolução de problemas usados pelas crianças. Considerando o seu carácter linear, ou seja, o seu modelo sequencial, há estratégias informais utilizadas pelos alunos, como *contar para a frente* que podem ser facilmente demonstradas na linha vazia e que se podem transformar em formas mais sofisticadas de contagem. Por outro lado, para além dos alunos poderem desenvolver as suas próprias estratégias informais é importante e desejável que os modelos utilizados como auxiliares de cálculo possam também proporcionar uma evolução no sentido da utilização de estratégias de cálculo mais formais e eficientes na resolução de problemas. Ora vejamos a situação anterior, exemplificando uma estratégia de cálculo:



Este exemplo permite evidenciar o partir de um número, do 25, ir até à dezena mais próxima e depois adicionar 6 ou 5+1. Esta estratégia revela-se muito potente, principalmente quando se trabalha com números grandes.

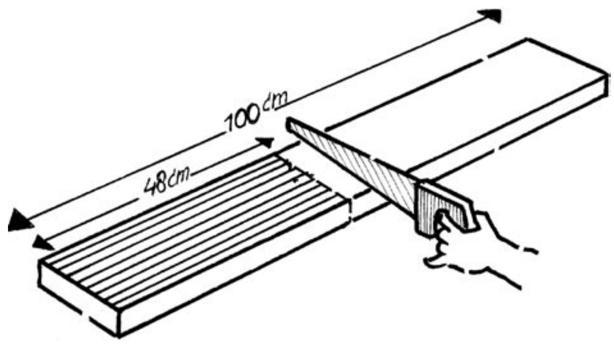
Outra das vantagens do modelo da linha vazia é poderem ser explícitos todos os modos diferentes de pensar para resolver o mesmo problema. O exemplo anterior poderia ser resolvido de diversas formas podendo, todas elas, serem registadas na linha vazia.



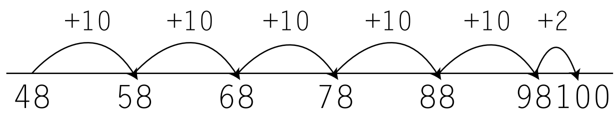
A utilização da linha vazia permite transformar os procedimentos informais em procedimentos mais formais e eficientes na resolução de problemas numéricos. Outro aspecto importante é o facto de o professor conseguir perceber como pensa cada um dos seus alunos quando efectua um cálculo. Por outro lado, o registo dos cálculos na linha vazia favorece ainda a comparação, por parte dos alunos das estratégias utilizadas, permitindo ao professor realçar as mais eficientes. É também importante realçar que, durante a utilização deste modelo, os erros efectuados pelos alunos ficam registados, podendo o professor identificar as dificuldades de cada um e, a partir dessa informação, encontrar formas que permitam ultrapassar essas dificuldades.

Vejamos outro exemplo que recorre a números *distantes entre si* e que mostra como o modelo da linha vazia facilita a transformação de procedimentos informais em procedimentos mais formais, ou seja, surge duma forma natural a necessidade de se utilizarem estratégias mais eficientes.

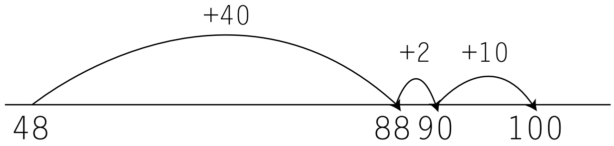
Temos uma tábua de madeira que precisamos de serrar em duas partes. O primeiro bocado tem 48 centímetros. Qual é o comprimento do segundo bocado?



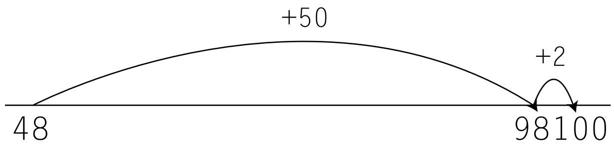
Um aluno ao pensar numa maneira de resolver o problema pode pensar em utilizar uma estratégia aditiva, recorrendo a saltos de 10 em 10 e regista na linha esse procedimento



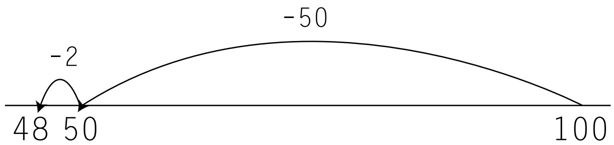
Este procedimento não é nada eficaz, é muito moroso e susceptível de enganos. Por isso, é necessário fazer realçar perante o mesmo problema, que pode haver outras estratégias mais eficazes. Um aluno pode, por exemplo, começar por pensar que 40+40 é 80 e pode recorrer a esse facto registando



ou então



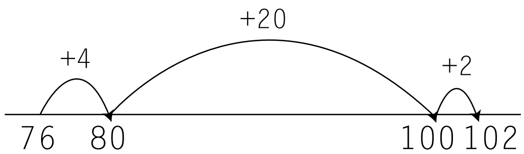
ou ainda



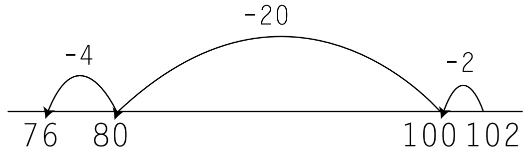
Deste modo, é fundamental que os alunos percebam que existem diferentes formas de interpretar um mesmo problema, havendo, por isso, diferentes formas de o resolver. Também é preciso que sejam capazes de analisar essas diferentes formas identificando semelhanças e relações entre elas. Foram aliás, estes os objectivos da tarefa *Calculando como a Luísa*. Apesar de haver um percurso de aprendizagem para a introdução da linha vazia logo desde o primeiro ano de escolaridade, essa não foi a opção seguida por este projecto, tendo sido propostas tarefas como a já referida que pretenderam a sua introdução, considerando-a como um modelo eficaz de registo de estratégias de cálculo mental.

Na tarefa em questão a operação envolvida é a subtracção e, naturalmente, alguns alunos terão tendência para registar e efectuar o cálculo 62-49. Ora este não é um cálculo fácil, pois envolve a subtracção com empréstimo. Como a tarefa foi pensada partindo do pressuposto que os alunos já conhecem o algoritmo, poderão resolvê-la dessa maneira mas, pretende-se, na segunda parte, dar a conhecer outras estratégias de calcular a diferença entre dois números e compará-las entre si. A linha numérica vazia surge, assim, de apoio ao cálculo formal, dando saltos que correspondem a cada um dos cálculos sucessivos efectuados pela Luísa.

Ainda na mesma tarefa são propostos outros problemas que permitem a utilização da linha vazia para registo de diferentes estratégias de resolução de situações subtractivas. Também se pretende, nesta tarefa, que os alunos verifiquem as suas respostas utilizando outro processo. Estarão, deste modo, a utilizar a relação inversa entre a operação adição e subtracção. Por exemplo 102-76



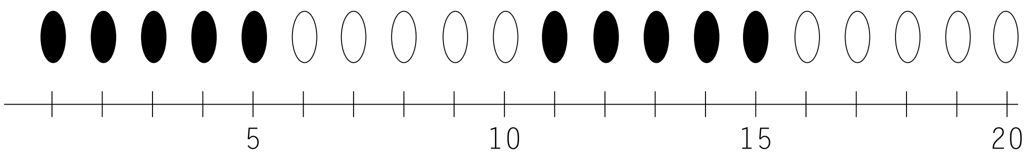
ou, saltando noutro sentido:



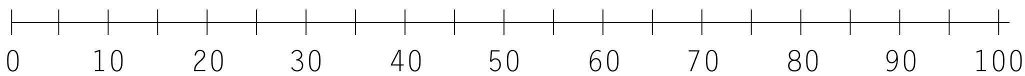
Tal como já foi dito, apesar de não ter sido a nossa opção no contexto deste projecto, faremos referência a algumas indicações didácticas relativas à introdução da linha numérica vazia na sequência de ensino aprendizagem dos números e do cálculo numérico.

A linha numérica vazia na sala de aula

Este modelo deve ser introduzido logo após o trabalho desenvolvido com os números até 20, ou seja, durante o primeiro ano ou início do segundo, como forma de registo do cálculo mental. Como é uma representação muito abstracta, a sua introdução deve ser feita de forma gradual e progressiva. Considerando que o trabalho com números até vinte deve ser apoiado inicialmente com um *colar de contas*, que é composto por vinte contas pintadas alternadamente, evidenciando grupos de cinco, a passagem deve ser feita deste material para a linha não vazia mas estruturada em grupos de cinco.



Assim, as crianças habituam-se a representar os números na linha, tendo alguns números que servem de marcos de referência, desenvolvendo o sentido do número relacionado com o seu aspecto ordinal e evidenciando a estrutura numérica. Mais tarde, no trabalho já com números até cem, estes podem ser representados utilizando uma linha estruturada de dez em dez.



Para além do posicionamento dos números utilizando o modelo sequencial, tanto a linha estruturada até 20 como a linha estruturada até 100 pode servir de apoio para o cálculo de adições e subtracções com números até 20, primeiro e, posteriormente para cálculos que envolvam um número de dois algarismos com um número de um algarismo.

Usando a estruturação em grupos de cinco e mais tarde em grupos de dez, a linha pode servir de registo aos procedimentos de resolução de problemas que exigem a passagem para a dezena seguinte. Depois de todo um trabalho com os números até 20 e representação dos números até 100, um dos argumentos a favor da introdução da linha numérica vazia, relaciona-se com o facto de serem os próprios alunos a escolher o intervalo numérico de que precisam para representar os cálculos. Associado a este modelo está a introdução dos esquemas de setas que servem para explicar o modo de pensar ao resolver cada problema e que constituem, também, um procedimento abstracto de representação.

Usando a linha numérica para representação dos cálculos, está-se a privilegiar uma estratégia sequencial, dando saltos até à dezena mais próxima e, posteriormente, saltos de dez em dez, como foi exemplificado anteriormente. Deste modo, a aprendizagem das operações numéricas, nomeadamente da adição e da subtracção, será facilitada, na medida em que os alunos já têm um bom conhecimento da posição dos números até cem e das estratégias que tornam o cálculo mais rápido e eficaz.

Um exemplo de diferentes estratégias para resolver um mesmo problema recorrendo à linha numérica vazia é o da tarefa *Como é possível?*. Durante o seu desenvolvimento é possível identificar diferentes procedimentos para resolver o mesmo problema, consoante o sentido da operação associado ou até o tipo de estratégias com que cada aluno se sente *mais confortável*. A visualização esquemática de cada uma dessas estratégias poderá ajudar os alunos a compreendê-las, para além de poder proporcionar ao professor a organização de uma discussão em torno delas. No mesmo exemplo, a linha numérica vazia torna também fácil de visualizar a relação inversa entre a adição e a subtracção, mostrando que se percorre a mesma distância para a frente, do 32 para o 50, utilizando os mesmos números e saltos (através da adição) que andando para trás, do 50 para o 32 (através da subtracção).

A propriedade comutativa e associativa da adição são também visíveis nos diferentes procedimentos utilizados, contribuindo assim para que os alunos desenvolvam um progressivo sentido do número e sejam capazes de evoluir para estratégias mais eficazes e com números maiores.

Bibliografia

Baroody, A. (2002). Incentivar a aprendizagem matemática das crianças. Em B. Spodek (Org.), *Manual de Investigação em Educação de Infância* (tradução portuguesa). Lisboa: Fundação Calouste Gulbenkian.

Fosnot, C. T. e Dolk, M. (2001). *Young mathematics at work: Constructing number sense, addition and subtraction.* Portsmouth, NH: Heinemann.

Gelman, R. e Gallistel, C. R. (1978). *The chid's understanding of number.* Cambridge: Harvard University Press.

Piaget, J. e Szeminska, A. (1964). *A génese do número na criança.* Rio de Janeiro: Zahar Editores.